تصحيح التمرين الأول

1.أ. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ ((C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$)

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ ((C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ ((C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)+x\right) = 0$ ((C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=-x$ بجوار $+\infty$)

ب. جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

ج. على المجال $]0,+\infty[$: لدينا (C_f) يوجد فوق المستقيم $(\Delta): y=-x$

إذن $f(x)-(-x) \geq 0$ و منه $f(x)+x \geq 0$

د. عدد حلول المعادلة $f(x)=-x$ على $\mathbb{R}^*$:

لدينا (C_f) و $(\Delta): y=-x$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة $f(x)=-x$: حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$.

2. مساحة الحيز المخدش في المبيان هي مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم $(\Delta): y=-x$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$:

$$A = \int_1^2 \left|f(x)-(-x)\right| dx .(U.A)$$

و بما أن $f(x)+x \geq 0$ على المجال $]0,+\infty[$

فإن : $A = \int_1^2 \left(f(x)+x\right) dx .(U.A)$

إذن : $A = \int_1^2 \left(e^{-x}+\dfrac{1}{x}\right) dx .(U.A)$

إذن : $A = \left[-e^{-x}+\ln x\right]_1^2 .(U.A)$

و منه : $A = \left(e^{-1}-e^{-2}+\ln 2\right).(U.A)$

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول :

1) الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$
ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(-xe^{-x}+1\right)' \\ &= (-x)'e^{-x}+(-x)\left(e^{-x}\right)'+0 \\ &= -e^{-x}-x.\left(-e^{-x}\right) \\ &= -e^{-x}+x.e^{-x} \\ &= (x-1).e^{-x} \end{aligned}$$

لدينا : $e^{-x}>0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$(e-1)/e$	$\nearrow$	1

2) لدينا $g(1)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $\mathbb{R}$
إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq g(1)$
إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq \dfrac{e-1}{e}$
و منه لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x)>0$ (لأن $\dfrac{e-1}{e}>0$)

الجزء الثاني :

1) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x-1+(x+1).e^{-x} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty \end{cases}$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x-1+(x+1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x-1+xe^{-x}+e^{-x} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{t\to-\infty} -te^{t} = 0 \quad \begin{pmatrix} t=-x \\ x\to+\infty \\ t\to-\infty \end{pmatrix} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{t} = 0 \end{cases}$

2) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}+e^{-x} = 0$

إذن : (Δ) ذي المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1+(x+1)e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x} = +\infty$

إذن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

3) ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$f(x)-(x-1) = (x+1)e^{-x}$

لدينا : $e^{-x}>0$ إذن إشارة $f(x)-(x-1)$ هي إشارة $(x+1)$

- ✓ على المجال $[-1,+\infty[$: $x+1\geq 0$ إذن $f(x)-(x-1)\geq 0$ و منه (C_f) يوجد فوق (Δ)
- ✓ على المجال $]-\infty,1]$: $x+1\leq 0$ إذن $f(x)-(x-1)\leq 0$ و منه (C_f) يوجد تحت (Δ)

4) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x-1+(x+1)e^{-x}\right)' \\ &= 1+(x+1)'e^{-x}+(x+1).(e^{-x})' \\ &= 1+1.e^{-x}-(x+1)e^{-x} \\ &= 1+e^{-x}.(1-x-1) \\ &= 1-xe^{-x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا حسب الجزء الأول : 2) $g(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن : $f'(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

و منه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(5

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا $f'(x) = g(x)$ إذن : $f''(x) = g'(x)$

و منه على المجال $[1,+\infty[$: $f''(x) \geq 0$ إذن (C_f) محدب

و على المجال $]-\infty,1]$: $f''(x) \leq 0$ إذن (C_f) مقعر

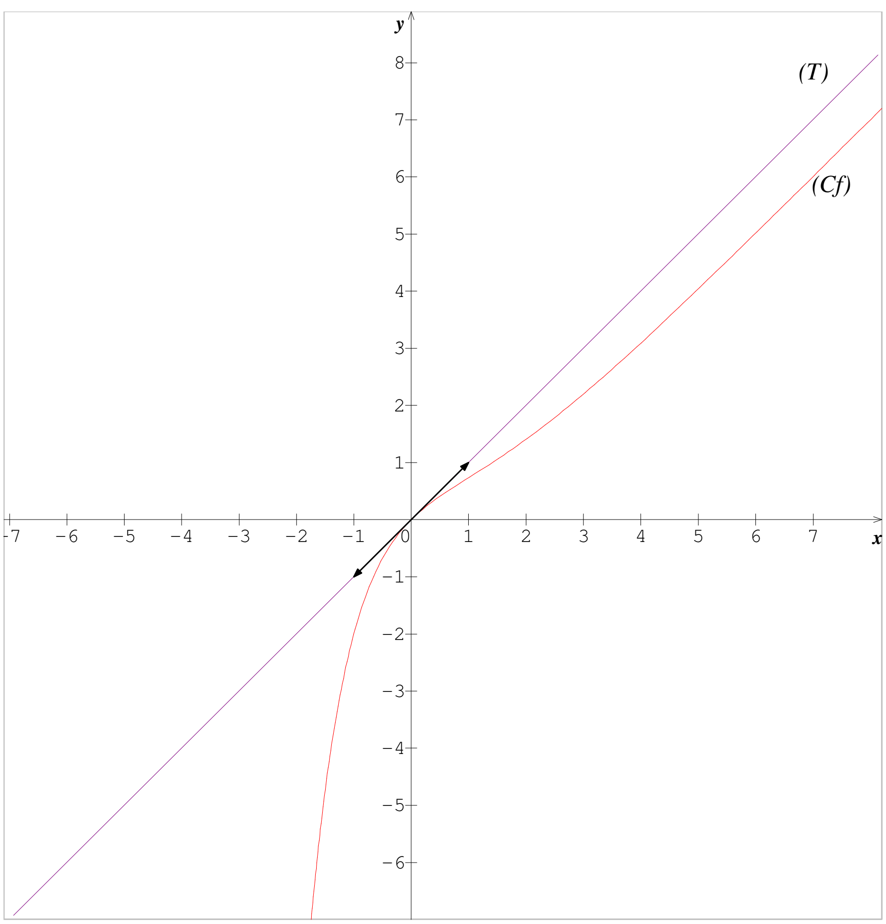
و بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 1 فإن النقطة $I(1, f(1))$ هي نقطة انعطاف لمنحنى (C_f).

(6 أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 0 :

$$y = f'(0).(x-0) + f(0)$$

إذن : $y = 1.(x) + 0$ أي $y = x$

ب-



7) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، لنحسب $\int_0^2 (x+1)e^{-x}dx$:

$$\begin{cases} u(x)=x+1 \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x+1)e^{-x}dx &= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx \\ &= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^2 - \left[e^{-x}\right]_0^2 \\ &= \left(-3e^{-2}+1\right)-\left(e^{-2}-1\right) \\ &= 2-4e^{-2}\end{aligned}$$

ب- مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيمات اللذين معادلاتهم : $y=x-1$ و $x=0$ و $x=2$

(على المجال $[0,2]$: $f(x)-(x-1)\geq 0$)

$$\begin{aligned}A &= \int_0^2 \left|f(x)-(x-1)\right|dx.(UA) \\ &= \int_0^2 \left(f(x)-(x-1)\right)dx.(UA) \\ &= \int_0^2 (x+1)e^{-x}dx.(UA) \\ &= \left(2-4e^{-2}\right).(UA)\end{aligned}$$

<u>الجزء الثالث :</u>

1)

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0=1$

إذن $0\leq u_0\leq 1$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$:

- نفترض أن : $0\leq u_n\leq 1$
- و نبين أن : $0\leq u_{n+1}\leq 1$

لدينا $0\leq u_n\leq 1$ و لدينا f تزايدية على المجال $[0,1]$

إذن : $f(0)\leq f(u_n)\leq f(1)$

إذن : $0\leq u_{n+1}\leq 2e^{-1}\leq 1$

✓ نستنتج : $0\leq u_n\leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا على المجال $[0,1]$: $f(x)\leq x$

و بما أن $u_n \in [0,1]$ فإن $f(u_n) \le u_n$

و منه لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} \le u_n$

و بالتالي (u_n) تناقصية .

(3

- ✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة فإن (u_n) متقاربة
- ✓
  - f متصلة على المجال $[0,1]$
  - $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0, 2e^{-1}] \subset [0,1]$
  - (u_n) متقاربة

  إذن نهاية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x) = x$

  $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$

  و منه : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

تصحيح التمرين الثالث

(1

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / e^x \neq 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\right\} \\ &= \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[\end{aligned}$$

(2

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty \quad ✓$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty \quad ✓$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} 2x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} e^x - 1 = 0^- \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty \quad ✓$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} 2x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0^+ \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} 2x + \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = +\infty \quad ✓$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

(3 لندرس تغيرات f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f

ليكن $x \in D_f$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2x+\frac{e^x}{e^x-1}\right)' \\
&= 2+\frac{(e^x)'(e^x-1)-e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2} \\
&= 2+\frac{e^x(e^x-1)-e^x.e^x}{(e^x-1)^2} \\
&= 2+\frac{\cancel{e^{2x}}-e^x-\cancel{e^{2x}}}{(e^x-1)^2} \\
&= \frac{2(e^x-1)^2-e^x}{(e^x-1)^2} \\
&= \frac{2(e^{2x}-2e^x+1)-e^x}{(e^x-1)^2} \\
&= \frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}
\end{aligned}$$

لدينا : $(e^x-1)^2>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2e^{2x}-5e^x+2$

x	$-\infty$		$-ln2$		0		$ln2$		$+\infty$
$2e^{(2x)}-5e^{(x)}+2$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$-ln2$		0		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2ln(2)-1$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$2ln(2)+2$	$\nearrow$	$+\infty$

(4

✓ $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty\end{cases} \Rightarrow$ (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=0 \Leftarrow$ (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=2x$ بجوار $-\infty$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لنحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\dfrac{e^x}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{e^x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{1}{x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=2$$

لنحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{e^x}}=1$$

إذن : (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=2x+1$ بجوار $+\infty$

5) ليكن $x\in D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

✓ من الواضح أن : $2(0)-x=-x\in D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

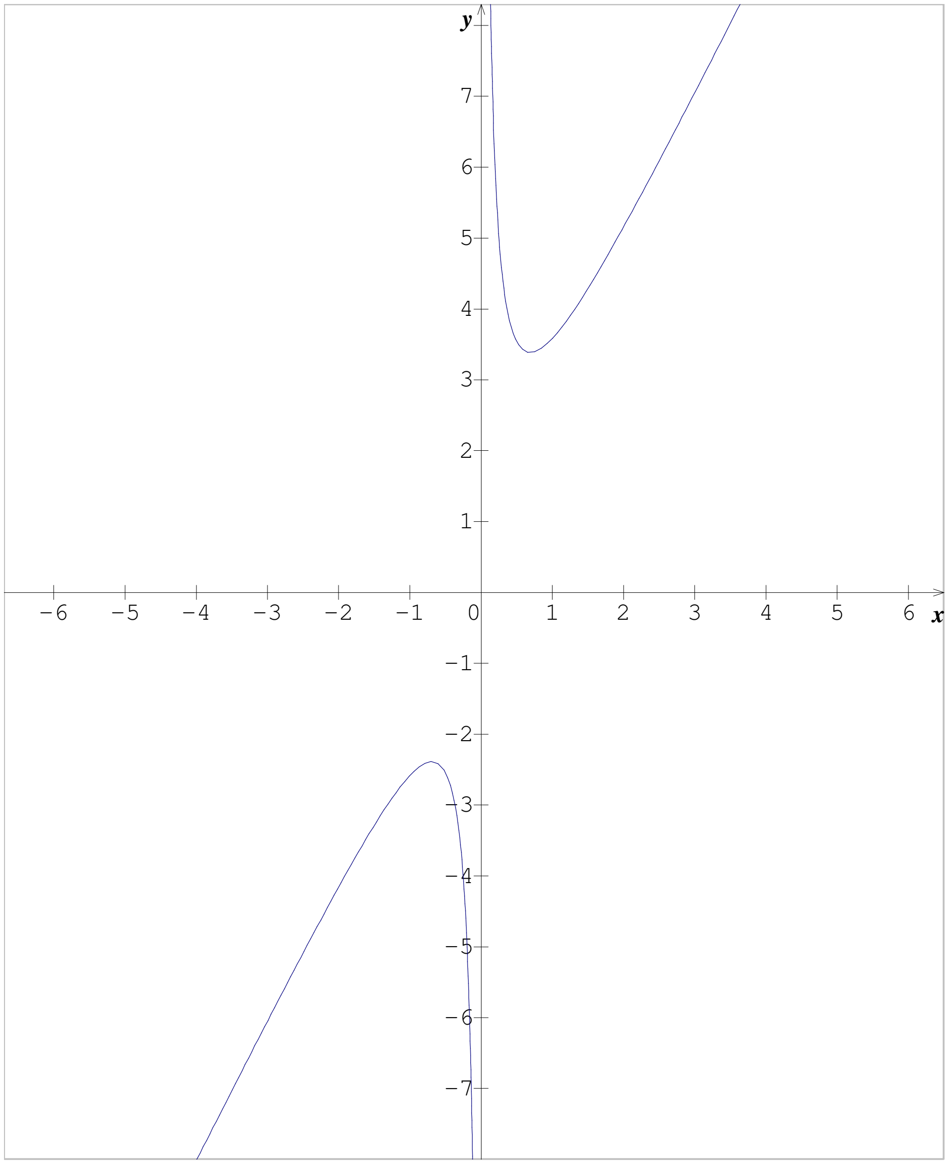
✓ $$f\left(2(0)-x\right)=f(-x)=-2x+\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}=-2x+\frac{1}{1-\dfrac{1}{e^{-x}}}=-2x+\frac{1}{1-e^x}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)-f(x)=1-\left(2x+\frac{e^x}{e^x-1}\right)=-2x+1-\frac{e^x}{e^x-1}=-2x+\frac{\cancel{e^x}-1-\cancel{e^x}}{e^x-1}=-2x+\frac{1}{1-e^x}$$

إذن : $f\left(2(0)-x\right)=2\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(x)$

و منه النقطة $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f).

6)



7) مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \ln 2$ و $x = 1$

$$A = \int_{\ln 2}^{1} \left|f(x) - 2x\right| dx .(UA)$$

$$= \int_{\ln 2}^{1} \frac{e^x}{e^x - 1} dx .(UA)$$

$$= \int_{\ln 2}^{1} \frac{\left(e^x - 1\right)'}{e^x - 1} dx .(UA)$$

$$= \left[\ln\left|e^x - 1\right|\right]_{\ln 2}^{1} .(UA)$$

و منه : $A=\ln(e-1).(UA)$

تصحيح التمرين الرابع :

الجزء الأول

(1

- ليكن $x\in[0,+\infty[$:

$$g'(x)=(x+2-e^x)'=1-e^x$$

لدينا : $x\geq 0$ إذن $e^x\geq e^0$

إذن $e^x\geq 1$

إذن $-e^x\leq -1$

إذن $1-e^x\leq 0$

و منه $g'(x)\leq 0 \quad \forall x\in[0,+\infty[$

و لدينا : $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

و بالتالي الدالة g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$.

- $$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x+2-e^x=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty\end{cases}$

2) **أ-** لنبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,+\infty[$

بما أن :

✓ الدالة g **متصلة** على $[0,+\infty[$ (مجموع دوال متصلة على $[0,+\infty[$)

✓ الدالة g **تناقصية قطعا** على $[0,+\infty[$

✓ لدينا : $g([0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x),g(0)\right]=]-\infty,1]$ إذن $\underline{\underline{0\in g([0,+\infty[)}}$

فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,+\infty[$.

ب- لدينا :

✓ g **متصلة** على $[1,14;1,15]$

✓ $g(1,14)\times g(1,15)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $1,14<\alpha<1,15$

ج-

✓ الحالة 1: إذا كان $x\geq\alpha$

نعلم أن g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$

إذن $g(x)\leq g(\alpha)$

و منه $g(x)\leq 0$ (لأن $g(\alpha)=0$)

✓ الحالة 2: إذا كان $0\leq x\leq\alpha$

نعلم أن g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$

إذن $g(x)\geq g(\alpha)$

و منه $g(x)\geq 0$ (لأن $g(\alpha)=0$)

الجزء الثاني

1) **أ-** ليكن $x\in[0,+\infty[$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$

لدينا : $$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{xe^x+1}\right)'=\frac{(e^x-1)'.(xe^x+1)-(e^x-1)(xe^x+1)'}{(xe^x+1)^2}$$

إذن : $$f'(x)=\frac{e^x.(xe^x+1)-(e^x-1)((x)'e^x+x(e^x)'+0)}{(xe^x+1)^2}$$

إذن : $$f'(x)=\frac{e^x.(xe^x+1)-(e^x-1)(e^x+xe^x)}{(xe^x+1)^2}=\frac{e^x.(xe^x+1)-(e^x-1).(1+x).e^x}{(xe^x+1)^2}$$

إذن : $$f'(x)=\frac{e^x.\left[(xe^x+1)-(e^x-1).(1+x)\right]}{(xe^x+1)^2}=\frac{e^x\left[xe^x+1-e^x-xe^x+1+x\right]}{(xe^x+1)^2}$$

إذن : $$f'(x)=\frac{e^x\left[x+2-e^x\right]}{(xe^x+1)^2}$$

و منه : لكل x من $[0,+\infty[$: $$f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

ب- **على المجال $[0,\alpha]$:**

لدينا : $e^{x}>0$ و $\left(xe^{x}+1\right)^{2}>0$

و حسب نتيجة الجزء الأول السؤال ج- : $g(x)\geq 0$

إذن $f'(x)\geq 0$ و منه الدالة f تزايدية

على المجال $[\alpha,+\infty[$:

لدينا : $e^{x}>0$ و $\left(xe^{x}+1\right)^{2}>0$

و حسب نتيجة الجزء الأول السؤال ج- : $g(x)\leq 0$

إذن $f'(x)\leq 0$ و منه الدالة f تناقصية

2) أ- ليكن $x\in[0,+\infty[$:

لدينا : $$f(x)=\frac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}=\frac{\cancel{e^{x}}\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)}{\cancel{e^{x}}\left(x+\frac{1}{e^{x}}\right)}=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

إذن : لكل $x\geq 0$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

ب-

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{t\to-\infty}e^{t}=0$ $\quad\begin{pmatrix} t=-x\\ x\to+\infty\\ t\to-\infty\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x+e^{-x}=+\infty\end{cases}$$

- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ فإن (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

3) أ- لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}$

و نعلم أن α حل للمعادلة $g(x)=0$ إذن : $g(\alpha)=0$

إذن لدينا :
$$\begin{aligned} g(\alpha)=0 &\Leftrightarrow \alpha+2-e^{\alpha}=0\\ &\Leftrightarrow e^{\alpha}=\alpha+2\end{aligned}$$

و منه : $$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}=\frac{(\alpha+2)-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{\alpha^{2}+2\alpha+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^{2}}=\frac{1}{\alpha+1}$$

و بالتالي : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$

ب- لدينا : $1{,}14<\alpha<1{,}15$ إذن : $2{,}14<1+\alpha<2{,}15$

إذن : $\dfrac{1}{2{,}15}<\dfrac{1}{1+\alpha}<\dfrac{1}{2{,}14}$

إذن : $0{,}46<\dfrac{1}{2{,}15}<\dfrac{1}{1+\alpha}<\dfrac{1}{2{,}14}<0{,}47$

و منه : $0{,}46<f(\alpha)<0{,}47$ و هذا تأطير للعدد $f(\alpha)$ سعته $0{,}47-0{,}46=0{,}01=10^{-2}$

4) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 0 :

$$y=f'(0).(x-0)+f(0)$$

لدينا : $f'(0)=1$ و $f(0)=0$ إذن : $y=1.(x-0)+0$ أي : $y=x$

5) أ- ليكن x من $[0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
f(x)-x &= \frac{e^x-1}{xe^x+1}-x\\
&=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}\\
&=\frac{(1-x^2)e^x-(1+x)}{xe^x+1}\\
&=\frac{(1+x)(1-x)e^x-(1+x)}{xe^x+1}\\
&=\frac{(1+x)\left[(1-x)e^x-1\right]}{xe^x+1}\\
&=\frac{(1+x)(e^x-xe^x-1)}{xe^x+1}
\end{aligned}$$

إذن : لكل x من $[0,+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ حيث $u(x)=e^x-xe^x-1$

ب- اندرس تغيرات الدالة u

ليكن x من $[0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
u'(x) &=(e^x-xe^x-1)'\\
&=(e^x)'-(xe^x)'+0\\
&=e^x-\left((x)'e^x+x(e^x)'\right)\\
&=e^x-(e^x+xe^x)\\
&=e^x-e^x-xe^x\\
&=-xe^x
\end{aligned}$$

لدينا : $x \geq 0$ و $e^x > 0$ إذن : $u'(x) \leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

إذن الدالة u تناقصية .

و بما أن $x \geq 0$ و u تناقصية فإن : $u(x) \leq u(0)$ أي : $u(x) \leq 0$ (لأن $u(0)=0$)

ج- ليكن x من $[0,+\infty[$:

لندرس الوضع النسبي ل (C_f) و (T)

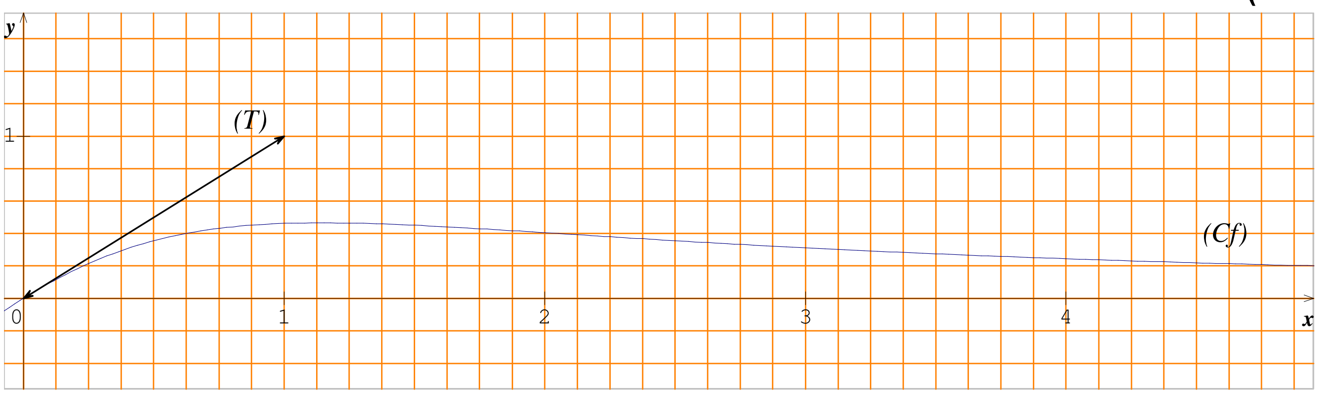
لدينا : $f(x)-x = \dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$

و لدينا $x \geq 0$ إذن $xe^x+1>0$ و $x+1>0$ و منه إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $u(x)$

و حسب نتيجة لسؤال السابق لدينا : $u(x) \leq 0$ و منه $f(x)-x \leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

و بالتالي : (C_f) يوجد تحت المستقيم (T)

6)



الجزء الثالث

1) لنحدد دالة أصلية ل f على $[0,+\infty[$

الدلة f متصلة على $[0,+\infty[$ إذن f تقبل دالة أصلية F على $[0,+\infty[$

ليكن x من $[0,+\infty[$:

لدينا حسب نتيجة السؤال 2) في الجزء الثاني : $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

إذن : $f(x) = \dfrac{(x+e^{-x})'}{x+e^{-x}}$

و منه لكل x من $[0,+\infty[$: $F(x) = \ln|x+e^{-x}| = \ln(x+e^{-x})$ (لأن $x+e^{-x}>0$)

2)

لدينا : $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)-x|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

وبما أن $f(x)-x \leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

فإن : $\mathcal{A}=\int_0^1 (x-f(x))dx \times 4cm \times 4cm$

إذن : $\mathcal{A}=\left[\frac{x^2}{2}-F(x)\right]_0^1 \times 16cm^2$

إذن : $\mathcal{A}=\left[\frac{x^2}{2}-\ln\left(x+e^{-x}\right)\right]_0^1 \times 16cm^2$

إذن : $\mathcal{A}=\left(\frac{1}{2}-\ln\left(1+e^{-1}\right)\right)\times 16cm^2$

و منه : $\mathcal{A}=\left(8-16\ln\left(1+e^{-1}\right)\right)cm^2$

3) أ- لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع $v_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$

$$v_0=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=\left[\ln\left(x+e^{-x}\right)\right]_0^1=\ln\left(1+e^{-1}\right)$$

$$v_1=\int_1^2 f(x)dx=\left[F(x)\right]_1^2=\left[\ln\left(x+e^{-x}\right)\right]_1^2=\ln\left(2+e^{-2}\right)-\ln\left(1+e^{-1}\right)$$

$$v_2=\int_2^3 f(x)dx=\left[F(x)\right]_2^3=\left[\ln\left(x+e^{-x}\right)\right]_2^3=\ln\left(3+e^{-3}\right)-\ln\left(2+e^{-2}\right)$$

ب- لنبين أن لكل $n\geq 2$: $f(n+1)\leq\int_n^{n+1} f(x)dx\leq f(n)$

- ليكن $x\in\mathbb{R}$ بحيث : $n\leq x\leq n+1$ و لدينا f تناقصية على المجال $[2,+\infty[$

  إذن : $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$

  إذن : $\int_n^{n+1} f(n+1)dx\leq\int_n^{n+1} f(x)dx\leq\int_n^{n+1} f(n)dx$

  إذن : $(n+1-n)f(n+1)\leq\int_n^{n+1} f(x)dx\leq(n+1-n)f(n)$

  و منه : $f(n+1)\leq\int_n^{n+1} f(x)dx\leq f(n)$

- نستنتج مما سبق أن $f(n+1)\leq v_n\leq f(n)$

  و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1)=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=0$

  فإنه حسب مبرهنة الدرك : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

تصحيح التمرين الخامس

.I

(1

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 2x + 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{cases}$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 2x + 2 = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2x + 2 = +\infty \end{cases}$

(2 أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \left(e^x - 2x + 2\right)' = e^x - 2$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = e^x - 2$

ب-

✓ $$g'(x) = 0 \iff e^x - 2 = 0$$
$$\iff x = \ln 2$$

لندرس إشارة $e^x - 2$:

x	$-\infty$ $ln2$ $+\infty$
$ex-2$	$-$ 0 $+$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$ln2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$4-2ln2$	$\nearrow$	$+\infty$

✓ لدينا $g(\ln 2)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $\mathbb{R}$

إذن : $g(x) \geq g(\ln 2)$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن : $g(x) \geq 4-2\ln 2>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

و منه $g(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

II▪

1) أ-

✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x+1+xe^{-x} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x+1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty \end{cases}$

✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2}+\frac{1}{x}+e^{-x} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

✓ (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

ب-

✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x+1+xe^{-x} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{t \to -\infty} -te^{t} = 0 \end{cases}$

✓ لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$

إذن : (C_f) يقبل المستقيم (D) مقاربا مائلا معادلته $y=\frac{1}{2}x+1$ بجوار $+\infty$

ج- لندرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) :

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=xe^{-x}$ و بما أن $e^{-x}>0$ فإن إشارة $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ هي إشارة x

✓ على المجال $]-\infty,0]$: لدينا $x \leq 0$ إذن $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right) \leq 0$ و منه (C_f) يوجد تحت (D)

✓ على المجال $[0,+\infty[$: لدينا $x \geq 0$ إذن $0 \geq$ $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ و منه (C_f) يوجد فوق (D)

2) الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}x+1+xe^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}+(x)'e^{-x}+x\left(e^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}+e^{-x}-xe^{-x} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{e^x}-\frac{x}{e^x} \\ &= \frac{e^x+2-2x}{2e^x} \\ &= \frac{g(x)}{2e^x} \end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=\frac{g(x)}{2e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا : $g(x)>0$ و $2e^x>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن $f'(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

و منه الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

3) أ-

✓ f متصلة على $[-1,0]$

✓ لدينا $f(-1)=\frac{1}{2}-e<0$ و $f(0)=1>0$ إذن : $f(0)\times f(-1)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : يوجد α من المجال $]-1,0[$ بحيث $f(\alpha)=0$

ب- معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0 :

$$y=f'(0).(x-0)+f(0)$$

$$y=\frac{3}{2}x+1$$

ج- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{g(x)}{2e^x}\right)' \\
&= \frac{g'(x)\times 2e^x - g(x)\times\left(2e^x\right)'}{\left(2e^x\right)^2} \\
&= \frac{\left(e^x-2\right)\times 2e^x - \left(e^x-2x+2\right)\times 2e^x}{\left(2e^x\right)^2} \\
&= \frac{2e^x\left[e^x-2-e^x+2x-2\right]}{\left(2e^x\right)^2} \\
&= \frac{2x-4}{2e^x} \\
&= \frac{x-2}{e^x}
\end{aligned}$$

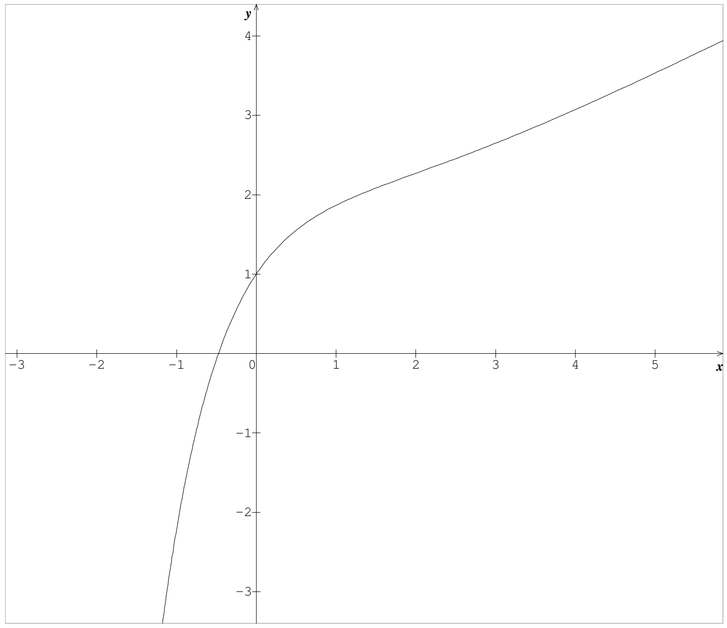
إذن $f''(x)=\dfrac{x-2}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا $e^x>0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x-2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 2 فإن النقطة $I\left(2;2+2e^{-2}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $\left(C_f\right)$

(4



5) باستعمال مكاملة بالأجزاء لنحسب : $\int_0^2 xe^{-x}dx$:

$$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^{-x}dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx \\ &= \left[-xe^{-x}\right]_0^2 - \left[e^{-x}\right]_0^2 \\ &= \left(-2e^{-2}-0\right)-\left(e^{-2}-1\right) \\ &= 1-3e^{-2} \\ &= 1-\frac{3}{e^2} \end{aligned}$$

6) مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=2$.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 |f(x)|dx.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\| \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x+1+xe^{-x}\right)dx.2cm.2cm \\
&= \left(\int_0^2\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx+\int_0^2 xe^{-x}dx\right).4cm^2 \\
&= \left(\left[\frac{x^2}{4}+x\right]_0^2+\left(1-\frac{3}{e^2}\right)\right).4cm^2 \\
&= \left(3+1-\frac{3}{e^2}\right).4cm^2 \\
&= \left(16-\frac{12}{e^2}\right).cm^2
\end{aligned}
$$

つづく